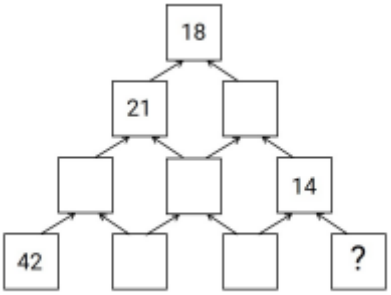
Критерии оценивания Оренбургской областной олимпиады школьников 5-8 классов по математике

8 класс

1. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке?



Ответ: 6.

Решение: восстановим числа в таблице, пройдя по ней сверху вниз. Например, если во второй строке стоят числа 21 и x, то из $18 = \frac{1}{2}(2 + x)$ получаем x = 15. Аналогично в третьей строке получаем, что рядом с числом 14 стоит 16, а рядом с ним – 26; в последней строке стоят числа 42, 10, 22 и 6.

Баллы	Критерии оценивания задания № 1
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

2. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 96 рублей. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на n% дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 60.

Решение: из условия задачи следует, что 96 = $n \cdot (1 + n\ 100)$. Преобразуя это уравнение, получаем: $n^2 + 100n - 9600 = 0$, $(n + 160)(n - 60) = 0$. Значит, n = 60, ведь шоколадка не может стоить отрицательное число рублей.

Баллы	Критерии оценивания задания № 2
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

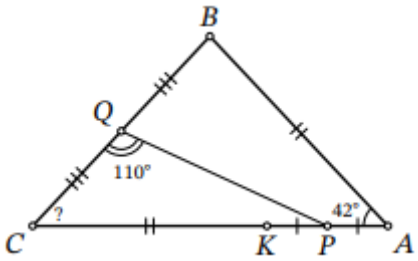
3. Найдите наименьшее натуральное n такое, что натуральное $n^2 + 14n + 13$ делится на 68.

Ответ: 21.

Решение: заметим, что $n^2 + 14n + 13 = (n + 1)(n + 13)$, а $68 = 4 \cdot 17$. Значит, одно из чисел n + 1 и n + 13 делится на 17. К тому же n должно быть нечётным, иначе n + 1 и n + 13 окажутся нечётными. Наименьшее такое натуральное n равно $2 \cdot 17 - 13 = 21$. Заметим, что оно подходит, так как $21^2 + 14 \cdot 21 + 13 = (21 + 1)(21 + 13) = 22 \cdot 34 = 11 \cdot 68$.

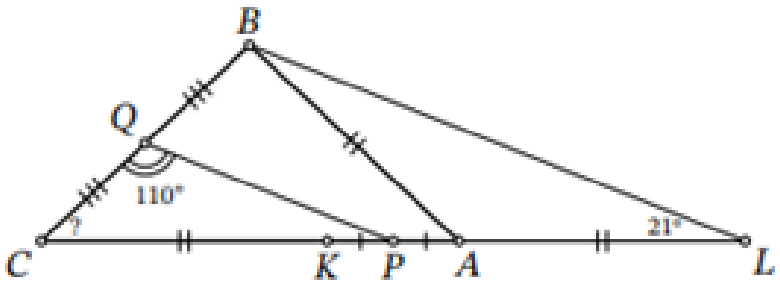
Баллы	Критерии оценивания задания № 3
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 42°$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC, такова, что $AB = CK$. Точки P и Q – середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110°$?



Ответ: 49°.

Решение:



Отметим на продолжении стороны CA за точку A точку L такую, что $AL = AB$. Заметим, что прямая PQ параллельна прямой BL как средняя линия в треугольнике BCL. Получаем, что $\angle LBC = \angle PQC = 110°$.

В равнобедренном треугольнике BAL внешний угол при вершине A равен 42°, поэтому углы при основании равны $\angle ALB = \angle ABL = \frac{42}{2} = 21°$. Из суммы углов треугольника BCL находим искомый угол: $\angle ACB = 180° - \angle CLB - \angle LBC = 180° - 110° - 21° = 49°$.

Баллы	Критерии оценивания задания № 4
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Приведена идея решения, произведено дополнительное построение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

5. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 13 ноликов так, чтобы среди любых трех подряд идущих знаков нашелся хотя бы один нолик, если а) $n = 27$; б) $n = 26$.

Ответ: а) 14; б) 105.

Решение: пронумеруем нолики слева направо числами от 1 до 13. Обозначим количество крестиков перед первым ноликом через a_1, между первым и вторым ноликом – через a_2, …, после тринадцатого нолика – через a_{14}. Получаем, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{14} = n$. То, что среди любых трёх подряд идущих значков есть хотя бы один нолик, эквивалентно тому, что три крестика не могут идти подряд, то есть $a_i \leq 2$ для любого i = 1, 2, … , 14. Заметим, что подходящие последовательности крестиков и ноликов взаимно однозначно сопоставляются последовательностям $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ с указанными условиями.

(а) Сумма 14 целых неотрицательных чисел равна 27, причём каждое из них не больше 2. Это означает, что какое-то одно a_i должно быть равно 1, а все остальные должны быть равны 2. Так как i может принимать любое значение от 1 до 14, получаем, что вариантов ровно 14.

(б) Теперь сумма 14 целых неотрицательных чисел равна 26. Это означает, что либо какое-то a_i равно 0, а все остальные равны 2, либо какие-то a_j и a_k равны 1, а все остальные равны 2. В первом случае получаем 14 вариантов. Во втором случае получаем $C_2^{14} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ вариант, ведь нам нужно выбрать 2 индекса из 14 возможных. Итого получаем ровно $14 + 91 = 105$ вариантов.

Баллы	Критерии оценивания задания № 5
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Приведено решение только пункта а) или б)
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует